Π.Θ. Μάθημα 14ο 24/11/2017

Κατανομή Erlang - Κατανομή Γάμμα

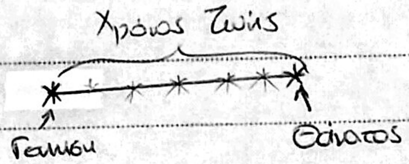
Συνάρτηση ή Ολοκλήρωμα Γάμμα

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad , \quad a>0$$

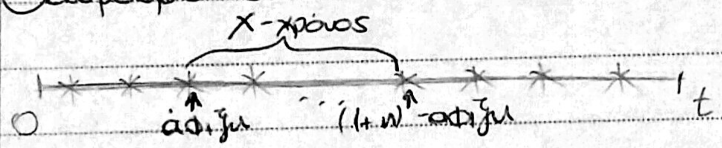
$$\Gamma(a) = (a-1)\cdot\Gamma(a-1) \quad , \quad a>1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Εκθετική Κατανομή → Κατανομή Χρόνου Ζωής



Θεωρούμε διαδικασία Poisson $\lambda>0$



Έστω $N(t)$ το πλήθος των αφίξεων στο $[0,t]$

Τότε: $N(t) \sim P(\lambda\cdot t)$, $\lambda>0$

$$P_{N(t)}(z) = P(N(t)=z) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^z}{z!} \quad , \quad z=0,1,\ldots$$

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο X μεταξύ n-διαδοχικών αφίξεων.

Προφανώς, ο χρόνος X είναι μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με τιμές $x>0$.

Για τυχόν $x>0$: $P(X>x) = P\begin{pmatrix}\text{Το πολύ } n-1 \text{ αφίξεις} \\ \text{σε χρόνο } x\end{pmatrix} =$

$$= P(N(x) \leq n-1) \Rightarrow \underline{P(X>x)} = \sum_{k=0}^{n-1} P(N(x)=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} \quad , \quad x>0 \, , \, \lambda>0$$

Άρα, $F_X(t) \overset{op}{=} P(X \leq x) = 1 - P(X>x) \Rightarrow$

$$\boxed{F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}, \quad x>0,\ \lambda>0}$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{f_X(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0,\ \lambda>0}$$

Είναι η f_X σ.π.π.?

<u>ΝΑΙ</u> γιατί: (i) $f_X(x) \geq 0$

(ii) $\int_0^\infty f_X(x)dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$

$$\xrightarrow[\frac{dy}{dx}=\lambda]{y=\lambda x} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{n-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{1}{\lambda^n} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy =$$

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{1}{\lambda^n} \Gamma(n) = 1.$$

<u>Πρόταση</u>: (Κατανομή Erlang)

Έστω η τ.μ. X παριστά το χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ n-διαδοχικών αφίξεων σε μια διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda>0$

Τότε η X είναι συνεχής τ.μ. με σππ

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0.$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Αν $x \leq 0$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$

και επομένως $f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx} = 0, \quad x \leq 0$

2. Αν $\lambda = 1$ τότε $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x>0$

και επομένως Erlang με $n=1 \equiv Εκθ(\lambda)$

3. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$, $\frac{\omega}{2} = n$ τότε $f_X(x) = \frac{1}{2^{\omega/2}\Gamma(\omega/2)} x^{(\omega/2)-1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0$

Η Erlang με $n = \frac{\omega}{2}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ $\equiv$ με την χι-τετράγωνο με ω-βαθμούς ελευθερίας (χ^2_ω)

④ Η αθκ της X με Erlang είναι:

$F_X(x) \overset{\text{ορ.}}{=} P(X \leq x) = \int_0^x f_X(t)\,dt$

$\Downarrow$

$F_X(x) = \frac{d^n}{\Gamma(n)} \int_0^x t^{n-1} e^{-dt}\,dt \quad (**)$

Η αθκ $\nexists$ σε κλειστή μορφή

Από $(*)$ και $(**)$: $F_X(x) = \frac{d^n}{\Gamma(n)} \int_0^x t^{n-1} e^{-dt}\,dt = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-dx}(dx)^k}{k!}$

Ορισμός (ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΓΑΜΜΑ)

Μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή γάμμα με παραμέτρους α, β με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, αν το σύνολο τιμών της X είναι $x > 0$ και η σ.π.π. της X είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Συμβολισμός: $X \sim G(\alpha, \beta)$

Παρατήρηση: Αν $\alpha = n$ και $\beta = 1/d$ τότε $Erlang(n, d) = G(\alpha, \beta)$

Παράδειγμα

2 πελάτες/λεπτό $\rightarrow$ ταμείο

α) P(λιγότεροι από 2 πελάτες σε διάστημα 3 λεπτών)

β) P(να μείνει το ταμείο χωρίς πελάτη περισσότερο από 2 min)

γ) P(ο χρόνος που θα χρειαστεί για την άφιξη του δεκατέσσερου πελάτη να είναι μικρότερος από 3 min)

α) Έστω X πλήθος πελατών σε διάστημα 3 min

$X \sim P(d)$, $d = ?$

$\left.\begin{array}{ll} 1\text{ min} & 2\text{ πελ} \\ 3\text{ min} & d\text{ πελ} \end{array}\right\} d = 6$

$X \sim P(d) \quad p_X(x) = \frac{e^{-6} 6^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$

$$P(X<2) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{e^{-6}6^0}{0!} + \frac{e^{-6}6^1}{1!}$$

β) Έστω Y ο χρόνος μεταξύ 2 διαδοχικών πελατών σε min

$Y \sim Εκθ(\lambda)$, $\lambda = ?$

$\lambda = 2$ γιατί ο χρόνος είναι εκφρασμένος σε min

$f_Y(y) = 2e^{-2y}$, $y>0$

$P(Y>2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - F_Y(2) = 1 - (1 - e^{-2 \cdot 2}) = e^{-4}$

Αλλιώς: Έστω Y ο χρόνος μεταξύ 2 διαδοχ. πελατών σε ένα δίλεπτο.

$Y \sim Εκθ(\lambda)$, $\lambda = ?$

$\left.\begin{array}{ll} 1 \text{ λεπτό} & 2 \text{ πελ} \\ 2 \text{ λεπτά} & \lambda = ? \end{array}\right\} \lambda = 4$

$Y \sim Εκθ(4)$

$f_X(y) = 4 \cdot e^{-4y}$, $F_X(x) = 1 - e^{-4y}$

$P(Y>1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_Y(1) = 1 - (1 - e^{-4 \cdot 1}) = e^{-4}$

γ) Έστω Z ο χρόνος σε λεπτά που απαιτείται για την αφίξη για την αφίξη του μεθεπόμενου πελάτη.

Τότε $Z \sim Erlang$ $n=2$ $\lambda = ?$

$\left.\begin{array}{ll} 1 \text{ λεπτό} & 2 \text{ πελάτες} \end{array}\right\} \lambda = 2$

$$f_Z(z) = \frac{2^2}{\Gamma(2)} \cdot z^{2-1} \cdot e^{-2z} = 4 \cdot z^{2-1} e^{-2z}$$

$$P(Z<3) = \int_0^3 \frac{2^2}{\Gamma(2)} z^{2-1} e^{-2z} \, dz$$

$$= \left(1 - \sum_{k=0}^{2-1} e^{-2 \cdot 3} \frac{(2 \cdot 3)^k}{k!}\right)$$

ή καλύτερα παραγοντική ολοκλήρωση?

⊛ είναι δύσκολη αυτή η άσκ

Άσκηση 4.6.1

P (Μεταξύ 5 οικογενειών με 6 παιδιά η καθεμία τουλάχιστον 3 οικογ. να έχουν 4 ή περισσότερα Κ) = Ζητώ: $P(X \geq 3)$

Έστω $E = \{$μια οικογ. με 6 παιδιά και έχει 4 ή περισ. Κ$\}$

Έστω X τ.μ. παριστά πλήθος των E στις 5 επαν. (=5 οικογ.)

Άρα $X \sim B(5, p = P(E))$

$p_X(x) = \binom{5}{x} p^x (1-e)^{5-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 5$

$P(X \geq 3) = \sum_{x=3}^{5} p_X(x) = \sum_{x=3}^{5} \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x}$ ⊛

Πρέπει να βρω την $p = P(E)$

Έστω $E' = \{$το παιδί μιας οικ. με 6 παιδιά να είναι κορίτσι (Κ)$\}$ και έστω Y τ.μ. που παριστά το πλήθος των E' σε μια οικογ. με 6 παιδιά.

$Y \sim B(6, p' = P(E') = \frac{1}{2})$

$p = P(E) = P(Y \geq 4) = \sum_{y \geq 4}^{6} \binom{6}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-y} = \frac{11}{32}$

Άρα ⊛ $= \sum_{x=3}^{5} \binom{5}{x} \left(\frac{11}{32}\right)^x \left(1 - \frac{11}{32}\right)^{5-x} = 0,2255.$

4.6.2

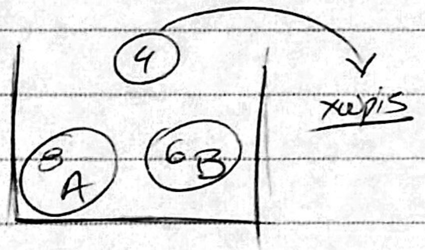
8 οπαδοί της ομάδας A } (4) → χωρίς
6 —''— της —''— B } επανατοποθέτηση

α) P (στους 4 οι οπαδοί της A να είναι τριπλάσιοι της B)

β) P (2 φορές οι οπαδοί της A να είναι τριπλάσιοι ~~της~~ της B) Αν επαναληφθεί 5 φορές

γ) Αν επαναληφθεί 3 φορές
P (μέχρις όταν οι οπαδοί της A τριπλάσιοι των οπαδών της B)

α)



Έστω X πλήθος των οπαδών της A στους 4

$X \sim Hg(M=8, N=6, n=4)$

$$p_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{n}}$$

$$P(X=3) = p_X(3) = \frac{\binom{8}{3}\binom{6}{4-3}}{\binom{8+6}{4}} = 0{,}3357$$

β) E = { σε μια επανάληψη οι οπαδοί της A να είναι τριπλάσιοι οπαδών B }

Έστω X πλήθος της E στις 5 επαναλ.

$X \sim B(n=5, p=P(E)=0{,}3357)$

$$P(X=2) = p_X(2) = \binom{5}{2} 0{,}3357^2 (1-0{,}3357)^{5-2} = \dots$$

γ) Έστω Y το πλήθος των επαναλήψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά E

$Y \sim Geo(p=P(E)=0{,}3357)$, $p_Y(y) = p(1-p)^{y-1}$, $y = 1, 2, \dots$

$$P(Y=3) = p_Y(3) = 0{,}3357^3 \cdot (1-0{,}3357)^{3-1} = \dots$$

Ρωσική Ρουλέτα

4.6.4

α) Αν επαναλάβει τη διαδικασία 10 φορές

i) ~~Π~~ Ποια η πιθανότητα να μην εκπυρσοκροτήσει?

ii) — 11 — να εκπυρσοκροτήσει 2 φορές

β) Αν επαναλαμβάνει συνεχώς

P(να εκπυρσοκροτήσει με την 4 φορά)

λύση

α) $E=\{$να εκπυρσοκροτήσει$\}$

$X=$ πλήθος των E στις 10 επαναλ.

$X \sim B(n=10,\ p=P(E)=1/6)$

$$p_x(x)=\binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10-x},\quad x=0,1,\dots,10$$

i) $P(x=0)=p_x(0)=\binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10-0}=0{,}1615$

ii) $P(x=2)=p_x(2)=\binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{10-2}=0{,}2907$

β) Έστω Y παριστά πλήθος επαναλ. μέχρι να εκπυρσοκροτήσει για $1^{η}$ φορά

$Y \sim Geo(p=P(E)=1/6)$

$$p_Y(y)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{y-1},\quad y=1,2,\dots$$

$$P(Y=4)=p_Y(4)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1}=0{,}0964$$